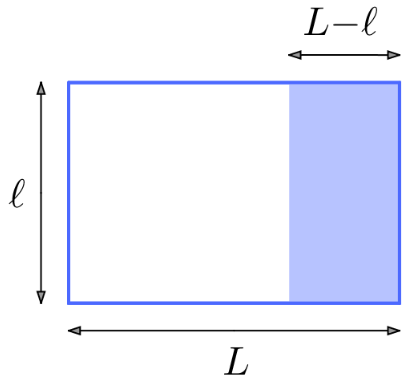
(IN)ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

– EXEMPLE INTRODUCTIF 1 –

Etant donnés deux réels $L, \ell > 0$ tels que $L > \ell$, on considère un « grand » rectangle de longueur L et de largeur ℓ, que l'on partage en un carré de côté ℓ et un « petit » rectangle de côtés ℓ et $L - \ell$. Ce « petit rectange » apparaît ombré sur le schéma ci-dessous :



On suppose en outre $2\ell > L$, ce qui garantit que le petit rectangle est de longueur ℓ et de largeur $L - \ell$.

Question : On souhaite que le petit rectangle soit « semblable » au grand ; autrement dit : que le rapport `longueur / largeur` soit le même pour les deux rectangles. Comment choisir le couple (L, ℓ) ?

Réponse : la condition imposée se traduit par

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{L - \ell}$$

c'est-à-dire, en posant $r = \frac{L}{\ell}$:

$$r = \frac{1}{r-1}$$

ou encore :

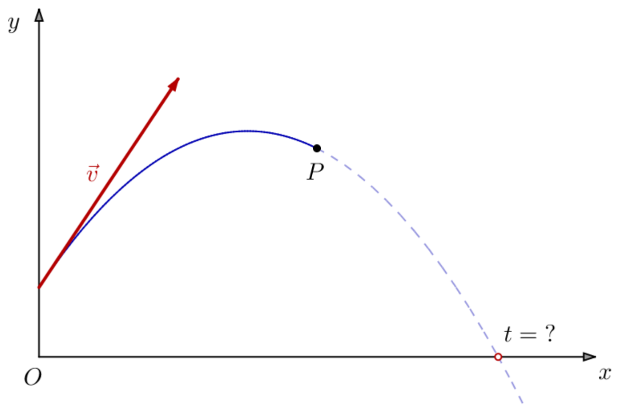
$$r^2 - r - 1 = 0$$

Le rapport r doit ainsi être solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, laquelle est une « équation du second degré ». En résolvant celle-ci (voir plus bas), on constatera qu'elle possède deux solutions réelles, dont une seule est positive ; il s'agit du « nombre d'or » $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$.

– EXEMPLE INTRODUCTIF 2 –

Un plan vertical est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de telle sorte que le vecteur $\vec{j}$ soit dirigé vers le haut.

Un projectile P, supposé ponctuel, est en chute libre dans ce plan. A l'instant $t = 0$, il se situe à l'altitude $y_0 = 1$ et sa vitesse est $\overrightarrow{v}\,(2, 3)$.



Question : A quel instant le projectile passera-t-il à l'altitude nulle ? Prendre $g = 10\,ms^{-2}$.

Réponse : L'application du principe fondamental de la dynamique donne (m désignant la masse du projectile et $\vec{a}$ son accélération) :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g}$$

avec :

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \qquad \vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\overrightarrow{OP}\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{g} = -g\vec{\jmath}$$

où x et y sont fonctions du temps. Par projection sur l'axe $(O, \vec{\jmath})$:

$$m\,\ddot{y} = -mg$$

et donc, pendant toute la durée de la chute libre :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_0 t + y_0$$

Comme $y_0 = 1$ et $\dot{y}_0 = 3$, on est conduit (en considérant que $g = 10$) à l'équation :

$$-5t^2 + 3t + 1 = 0$$

Celle-ci possède deux solutions réelles :

$$t_1 = \frac{3 - \sqrt{29}}{10} \qquad t_2 = \frac{3 + \sqrt{29}}{10}$$

Seule la solution positive est à retenir (puisqu'on cherche une date postérieure à l'instant initial).

– Equations du second degré –

Définition. Une **équation du second degré** est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c trois réels et $a \neq 0$. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ consiste à trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des réels x pour lesquels l'égalité est vérifiée. $\mathcal{S}$ est appelé « ensemble des solutions réelles » de l'équation.

Proposition 1. *Trois cas se présentent selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminant de l'équation) :*

- ⋆ *Si $\Delta < 0$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$*
- ⋆ *Si $\Delta = 0$, alors $\mathcal{S} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$*
- ⋆ *Si $\Delta > 0$, alors $\mathcal{S} = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$*

Démonstration. La clef de cette histoire est la mise sous **forme canonique** du trinôme. On peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

- ⋆ Si $\Delta < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} \geqslant -\frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

  et l'équation ne possède donc aucune solution.
- ⋆ Si $\Delta = 0$, l'équation équivaut à :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

  et possède donc $-\dfrac{b}{2a}$ pour unique solution.
- ⋆ Enfin, si $\Delta > 0$ l'identité remarquable $U^2 - V^2 = (U+V)(U-V)$ s'applique et permet d'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

  ce qui montre que l'équation possède, dans ce cas, les deux solutions annoncées (elles sont bien distinctes, puisque $\sqrt{\Delta} \neq 0$).

□

Remarque. Le discriminant permet (par l'intermédiaire de son signe) de ... ***discriminer*** entre différents cas de figure.

Remarque. Le calcul de Δ n'a pas lieu d'être dans les situations suivantes :

- ⋆ lorsque $c = 0$, on factorise simplement $ax^2 + bx$ par x. Par exemple :

$$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x=2)$$

- ⋆ lorsque $b = 0$, l'équation se résout directement. Par exemple :

$$3x^2+1=0 \quad \text{ne possède aucune solution (réelle)!}$$

$$3x^2-1=0 \Leftrightarrow \left(x\sqrt{3}-1\right)\left(x\sqrt{3}+1\right)=0 \Leftrightarrow \cdots$$

- ⋆ Le calcul de Δ n'a pas non plus lieu d'être lorsque le trinôme est déjà factorisé ou bien lorsqu'on reconnaît d'emblée une identité remarquable ! ! Par exemple :

$$2(x-\pi)\left(x-e^{1/3}\right)=0$$

$$4x^2+4x+1=0$$

Exercice 1. Les équations suivantes entrent-elles dans la catégorie des équations du second degré ? Résoudre chacune d'elles.

1) $(3x+1)(7x-8)=0$
2) $(t+1)^2+(t+2)^2+(t+3)^2=5t^2+6t+7$
3) $x^4-10x^2+1=0$
4) $e^{2x}+e^x-6=0$
5) $x\left(x^2+x-3\right)=x$
6) $tx^2-x+1=0$

Exercice 2. Soient a, b, c des nombres réels non nuls.
On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les points suivants :

$$A\,(a,0)\,,\quad B\,(a,b)\,,\quad C\,(a-c,b)$$

Soit $P\,(-1,\alpha)$ un point variable sur la droite d'équation $x=-1$.
La droite (PO) coupe la droite (AB) en M.
Prouver que les droites (OM) et (CM) sont perpendiculaires si, et seulement si le nombre α vérifie $a\alpha^2+b\alpha+c=0$.

Exercice 3. Un pétard est allumé puis lâché du haut d'un immeuble, sans vitesse initiale. On note $x\,(t)$ sa position (repérée sur un axe vertical orienté vers le bas, ayant pour origine sa position initiale) ; on rappelle que, pendant toute la durée de la chute libre et lorsqu'on néglige la résistance de l'air, on a :

$$x\,(t)=\frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{où } g \text{ désigne l'accélération de la pensanteur}$$

Ce n'est qu'au bout de 5 secondes que la détonation se fait entendre.
Quelle distance le pétard a-t-il parcouru avant d'exploser ?
On négligera la resistance de l'air... mais pas le délai de propagation du son !
On supposera l'immeuble assez haut pour que le pétard n'atteigne pas le sol avant d'exploser.
Données : accélération de la pensanteur $g=9,8\,ms^{-2}$; vitesse de propagation du son $v=340\,ms^{-1}$.

– Relations entre coefficients et racines –

On suppose ici que $\Delta>0$ et on note α, β les deux solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

Proposition 2. *La somme et le produit et α et β sont respectivement donnés par :*

$$\boxed{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

Démonstration. Le plus simple consiste à faire le calcul ...

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

et

$$\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{\left(b-\sqrt{\Delta}\right)\left(b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

□

Remarque. On peut aussi prouver ces relations en comparant l'expression développée $ax^2 + bx + c$ à l'expression factorisée $a(x-\alpha)(x-\beta)$ et en procédant par identification : le coefficient de x est b et aussi $-a(\alpha+\beta)$; le coefficient constant est c et aussi $a\alpha\beta$.

Remarque. Ces formules donnent accès au calcul d'expressions dépendant symétriquement des racines α et β, sans qu'on ait à calculer les racines elles-mêmes : il suffit de connaître les coefficients a, b et c de l'équation.

Exemple. En conservant les mêmes notations que ci-dessus, on voit que :

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

Exemple. On souhaite résoudre l'équation $6x^2 + 7x - 13 = 0$. On peut certes calculer Δ et appliquer les formules habituelles...
Mais on peut aussi observer que 1 est solution ; en effet $6 \times 1^2 + 7 \times 1 - 13 = 0$. Par suite, en notant β l'autre solution :

$$\beta = 1 \times \beta = -\frac{13}{6}$$

Exercice 4. On suppose $\Delta > 0$ et l'on note α, β les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$.
Exprimer $|\alpha - \beta|$ en fonction de a, b, c.

– Inéquations –

Proposition 3. *Le signe du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est résumé dans les tableaux suivants :*

Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	du signe de a	

Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		du signe de a	0	du signe de a	

Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f(x)$		du signe de a	0	du signe de $-a$	0	du signe de a	

Remarque. On retiendra notamment que : « lorsque $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines ».

Exercice 5. Etudier le sens de variation de la fonction :

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + 3x^2 + x$$

Exercice 6. Résoudre l'inéquation :

$$\left((x+1)^2 + 1\right)^2 > x^4 + 4x^2(x+1) + 12$$

Remarque. Si l'on souhaite placer un nombre réel t par rapport aux racines $\alpha < \beta$ d'un certain trinôme f (c'est-à-dire savoir si t est compris entre α et β ou bien, au contraire, se situe à l'extérieur de cet intervalle), il suffit de trouver le signe de $f(t)$. Ceci résulte directement de la proposition 3.

Dans le cas où t est extérieur à l'intervalle limité par les racines, on pourra déterminer le signe de $f'(t)$, afin de déterminer si t est inférieur à la plus petite racine ou bien supérieur à la plus grande. En effet, on observe que : $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$; or le signe de $f'(t)$ est :

- ★ celui de a sur l'intervalle $\left]-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$ et donc, en particulier sur l'intervalle $[\beta, +\infty[$.
- ★ celui de $-a$ sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right[$ et donc, en particulier sur l'intervalle $]-\infty, \alpha]$.

Exercice 7. Placer $-\frac{5}{3}$ par rapport aux racines de $f(x) = 128x^2 + 416x + 337$. Même chose avec $-\frac{3}{2}$

Exercice 8. Résoudre l'inéquation :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} < 4$$

Exercice 9. On pose pour tout $m \in \mathbb{R}$:

$$f_m(x) = \left(m^2 - 1\right)x^2 - mx - 2$$

L'équation $f_m(x) = 0$ sera notée E_m.

1) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation E_m possède exactement une solution.

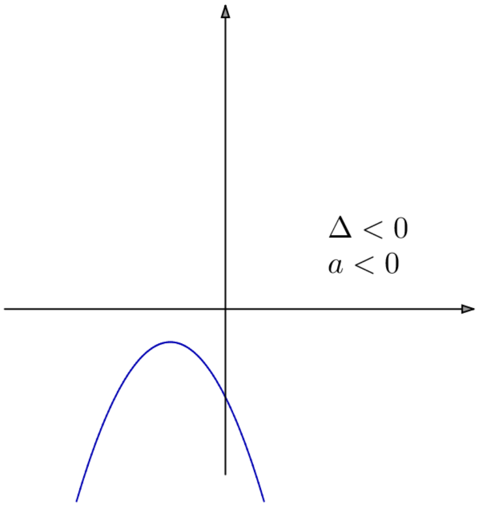
2) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation E_m possède exactement deux solutions.

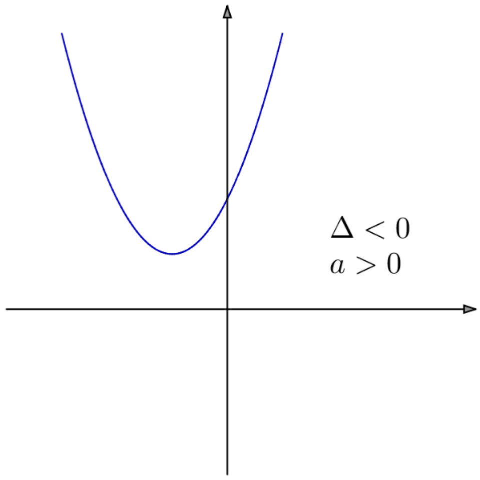
3) On suppose remplie la condition de la question 2 et l'on note α_m et β_m les solutions de E_m. A quelle condition m est-il strictement compris entre α_m et β_m ?

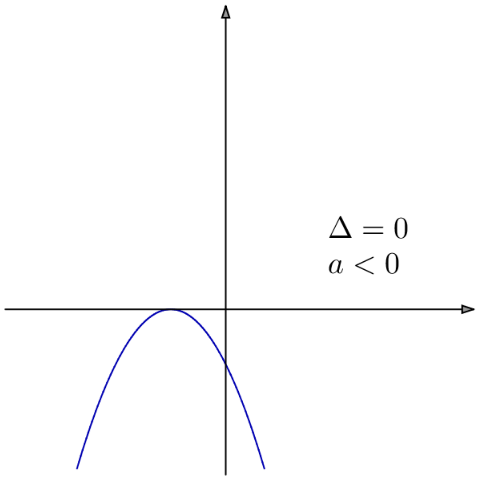
– Point de vue géométrique –

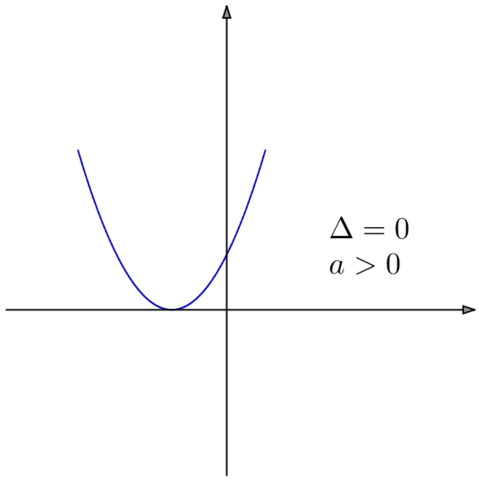
Les illustrations ci-dessous montrent l'allure du graphe de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, selon les valeurs de a, b, c. On suppose toujours $a \neq 0$.

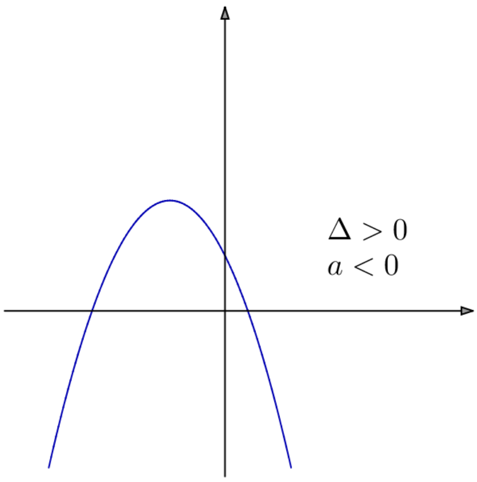
Six cas sont envisagés, selon les signes de Δ et de a. Dans tous les cas, le graphe de f est une parabole, dont le sommet est le point de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

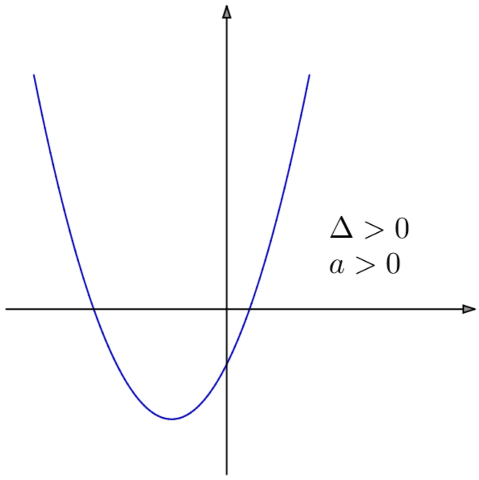












Ces illustrations doivent être interprétées en ayant en tête les énoncés des propositions 1 et 3.

– Solutions des exercices –

Exercice 1. Les équations suivantes entrent-elles dans la catégorie des équations du second degré ? Résoudre chacune d'elles.

1) $(3x+1)(7x-8)=0$

2) $(t+1)^2+(t+2)^2+(t+3)^2=5t^2+6t+7$

3) $x^4-10x^2+1=0$

4) $e^{2x}+e^x-6=0$

5) $x\left(x^2+x-3\right)=x$

6) $tx^2-x+1=0$

1) Oui, car cette équation équivaut à $21x^2-17x-8=0$. Ses solutions sont évidemment $-\frac{1}{3}$ et $\frac{8}{7}$ (merci de ne pas développer... !)

2) Oui, car en développant, on peut écrire cette équation sous la forme $2t^2-6t-7=0$. Ses solutions sont $\frac{3+\sqrt{23}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{23}}{2}$.

Remarque. Le nom de l'inconnue importe peu ... pourvu qu'il n'y en ait qu'une ! Et dans le cas contraire, le contexte se doit de préciser qui est cette inconnue (cf. question 6).

3) Non : il s'agit d'une équation du quatrième degré.

Toutefois, on la résout en se ramenant à une équation du second degré : il suffit de poser $y=x^2$ et de résoudre $y^2-10y+1=0$. Cette dernière équation possède deux solutions : $y_1=5-2\sqrt{6}$ et $y_2=5+2\sqrt{6}$. Comme celles-ci sont positives, l'équation proposée possède quatre solutions :

$$x_1=\sqrt{5-2\sqrt{6}}\quad x_2=-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\quad x_3=\sqrt{5+2\sqrt{6}}\quad x_4=-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

On peut d'ailleurs voir (comment ?) que :

$$x_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}\quad x_2=-\sqrt{3}+\sqrt{2}\quad x_3=\sqrt{3}+\sqrt{2}\quad x_4=-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

4) Non : il ne s'agit pas d'une équation du second degré en x.

Pour la résolution, on va poser $y=e^x$. L'équation transformée est $y^2+y-6=0$, dont les solutions sont $y_1=-3$ et $y_2=2$. Ainsi, pour $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$e^{2x}+e^x-6=0\Leftrightarrow (e^x=-3 \text{ ou } e^x=2)\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln(2)$$

Finalement, l'ensemble de solutions est $\mathcal{S}=\{\ln(2)\}$.

5) Non : il s'agit d'une équation du troisième degré. La résolution d'une équation générale du troisième degré n'est pas une chose évidente ... mais cette équation particulière est vraiment simple. Elle équivaut à : $x\left(x^2+x-4\right)=0$, c'est-à-dire $x=0$ ou $x^2+x-4=0$. On conclut ainsi que l'ensemble des solutions de l'équation initiale est

$$\mathcal{S}=\left\{0,\ \frac{-1-\sqrt{17}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

6) Tout d'abord, la question est « quelle est l'inconnue ? ». Le texte ne le précise pas... et sans cette précision, impossible de répondre à la question.

Exercice 2. Soient a, b, c des nombres réels non nuls.
On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les points suivants :

$$A\,(a, 0)\,, \quad B\,(a, b)\,, \quad C\,(a-c, b)$$

Soit $P\,(-1, \alpha)$ un point variable sur la droite d'équation $x = -1$.
La droite (PO) coupe la droite (AB) en M.
Prouver que les droites (OM) et (CM) sont perpendiculaires si, et seulement si le nombre α vérifie $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

On calcule facilement les coordonnées de M :

$$M\,(a, -a\alpha)$$

puis la pente de la droite (OM) :

$$p_{(OM)} = -\alpha$$

et celle de la droite (CM) :

$$p_{(CM)} = -\frac{a\alpha + b}{c}$$

La condition de perpendicularité[1] est :

$$p_{(OM)}\,p_{(CM)} = -1$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\alpha\,(a\alpha + b)}{c} = -1$$

ou encore :

$$\boxed{a\alpha^2 + b\alpha + c = 0}$$

Exercice 3. Un pétard est allumé puis lâché du haut d'un immeuble, sans vitesse initiale. On note $x\,(t)$ sa position (repérée sur un axe vertical orienté vers le bas, ayant pour origine sa position initiale) ; on rappelle que, pendant toute la durée de la chute libre et lorsqu'on néglige la résistance de l'air, on a :

$$x\,(t) = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{où } g \text{ désigne l'accélération de la pensanteur}$$

Ce n'est qu'au bout de 5 secondes que la détonation se fait entendre.
Quelle distance le pétard a-t-il parcouru avant d'exploser ?
On négligera la resistance de l'air... mais pas le délai de propagation du son !
On supposera l'immeuble assez haut pour que le pétard n'atteigne pas le sol avant d'exploser.
Données : accélération de la pensanteur $g = 9,8\,ms^{-2}$; vitesse de propagation du son $v = 340\,ms^{-1}$.

Notons T la date d'impact avec le sol. On sait que si $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$x\,(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Notons v la vitesse de propagation du son, t_0 l'instant où le pétard explose et t_1 l'instant où l'on entend l'explosion.

1. Dans un repère orthonormé, et pour deux droites D_1 et D_2 non « verticales », de pentes respectives p_1 et p_2, la condition $D_1 \perp D_2$ est équivalente à $p_1 p_2 = -1$. Connaissez-vous ce résultat ? Sauriez-vous l'établir ?

Comme $t_1 - t_0$ est le temps mis par le son pour parcourir la distance $x(t_0)$:

$$t_1 - t_0 = \frac{x(t_0)}{v} = \frac{gt_0^2}{2v}$$

Puisque t_1 est connu, on dispose ainsi d'une équation du second degré en t_0 :

$$\frac{g}{2v}\,t_0^2 + t_0 - t_1 = 0$$

Seule la solution positive est acceptable ; ainsi :

$$t_0 = \frac{v}{g}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2gt_1}{v}}\right)$$

et finalement, la distance parcourue par le pétard avant qu'il n'explose est :

$$\boxed{H = x(t_0) = \frac{v^2}{2g}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2gt_1}{v}}\right)^2}$$

Par comparaison, si l'on ne tient pas compte du délai de propagation du son (ce qui revient à considérer que $t_1 = t_0$), alors la distance parcourue est :

$$H' = \frac{1}{2}gt_1^2$$

Application numérique :

Avec $t_1 = 5\,s$, $v = 340\,ms^{-1}$, $g = 9,8\,ms^{-2}$, on trouve $\boxed{H \simeq 107,5\,m}$ tandis que $H' \simeq 122,5\,m$.

Exercice 4. On suppose $\Delta > 0$ et l'on note α, β les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$.
Exprimer $\left|\alpha - \beta\right|$ en fonction de a, b, c.

On observe que :

$$\left|\alpha - \beta\right| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\left|\alpha - \beta\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$$

Exercice 5. Etudier le sens de variation de la fonction :

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + 3x^2 + x$$

On calcule la dérivée de u et on étudie son signe. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = 3x^2 + 6x + 1$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 24$; d'où ses racines :

$$\alpha = \frac{-3 - \sqrt{6}}{3} \qquad \beta = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3}$$

Au final : u est croissante sur $\left]-\infty, \alpha\right]$, décroissante sur $[\alpha, \beta]$ et à nouveau croissante sur $\left[\alpha, +\infty\right[$.

Exercice 6. Résoudre l'inéquation :

$$\left((x+1)^2+1\right)^2 > x^4 + 4x^2(x+1) + 12 \qquad (\star)$$

L'inéquation $(\star)$ équivaut à $\left(x^2+2x+2\right)^2 > x^4+4x^3+4x^2+12$, c'est-à-dire, après développement et simplification, à :

$$x^2+2x-2>0$$

Le discriminant du trinôme x^2+2x-2 est $\Delta = 12$ et ses racines sont donc :

$$\alpha = -1-\sqrt{3} \qquad \beta = -1+\sqrt{3}$$

Ce trinôme est du signe de $a=1$ en dehors de $[\alpha,\beta]$, d'où l'ensemble des solutions de $(\star)$:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, -1-\sqrt{3}\right[\cup \left]-1+\sqrt{3}, +\infty\right[}$$

Exercice 7. Placer $-\frac{5}{3}$ par rapport aux racines de $f(x) = 128x^2+416x+337$. Même chose avec $-\frac{3}{2}$

Dans cet exemple :

$$a = 128 > 0 \qquad \Delta = 416^2 - 4\times 128\times 337 = 512 > 0$$

- ⋆ On calcule :
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{128\times 25}{9} - \frac{416\times 5}{3} + 337 = \frac{3200-6240+3033}{9} = -\frac{7}{9}$$
donc $-\frac{5}{3}$ se situe entre les racines.
- ⋆ Ensuite :
$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{128\times 9}{4} - \frac{416\times 3}{2} + 337 = 288-624+337 = 625-624 = 1$$
et donc $-\frac{3}{2}$ est à l'extérieur. Comme de plus :
$$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = -256\times\frac{3}{2} + 416 = -384+416 = 32 > 0$$
alors $-\frac{3}{2}$ est supérieur à la plus grande racine.

Exercice 8. Résoudre l'inéquation :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} < 4 \qquad (\star\star)$$

Tout d'abord, cette inéquation n'est définie que pour $x \in D = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$. Pour un tel x, on obtient une inéquation équivalente en regoupant tous les termes dans un membre puis en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{x+2+2(x-1)-4\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)(x+2)} < 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{4x^2+x-8}{(x-1)(x+2)} > 0$$

Le trinôme $4x^2 + x - 8$ admet pour racines :

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{129}}{8} \qquad \beta = \frac{-1 + \sqrt{129}}{8}$$

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		α		1		β		$+\infty$
$(x-1)(x+2)$		+	0	−	|	−	0	+	|	+	
$4x^2+x-8$		+	|	+	0	−	|	−	0	+	
$\frac{4x^2+x-8}{(x-1)(x+2)}$		+	||	−	0	+	||	−	0	+	

On a eu besoin de placer -2 et 1 par rapport à α et β, ce qui se fait aisément avec la technique mentionnée juste après l'énoncé de l'exercice 6.

Voici le détail : en posant $N(x) = 4x^2 + x - 8$, trinôme dont les deux racines sont α et β, on constate que $N(1) < 0$, ce qui prouve que $1 \in]\alpha, \beta[$. Par ailleurs, $N(-2) > 0$ et donc $-2 \in]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$ et comme de plus $N'(-2) = 8 \times (-2) + 1 = -15 < 0$, on conclut que $-2 \in]-\infty, \alpha[$.

On pouvait aussi voir, d'une part, que

$$\alpha < 0 < 1 = \frac{-1 + \sqrt{81}}{8} < \frac{-1 + \sqrt{129}}{8} = \beta$$

et, d'autre part, que :

$$\sqrt{129} < \sqrt{144} = 12, \text{ donc } \alpha = \frac{-1 - \sqrt{129}}{8} > \frac{-1 - 12}{8} = -\frac{13}{8} > -\frac{16}{8} = -2$$

On en déduit l'ensemble de solution de $(\star\star)$:

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup \left]\frac{-1 - \sqrt{129}}{8}, 1\right[\cup \left]\frac{-1 + \sqrt{129}}{8}, +\infty\right[}$$

Exercice 9. On pose pour tout $m \in \mathbb{R}$:

$$f_m(x) = \left(m^2 - 1\right) x^2 - mx - 2$$

L'équation $f_m(x) = 0$ sera notée E_m.

1) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation E_m possède exactement une solution.

2) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation E_m possède exactement deux solutions.

3) On suppose remplie la condition de la question 2 et l'on note α_m et β_m les solutions de E_m. A quelle condition m est-il strictement compris entre α_m et β_m ?

1) Si $m \in \{-1, 1\}$, alors l'équation E_m est du premier degré et possède donc une unique solution. Sinon, il s'agit d'une équation du second degré et l'existence d'une unique solution équivaut à la condition $\Delta_m = 0$, avec :

$$\Delta_m = 9m^2 - 8$$

Ainsi, la condition cherchée est :

$$\boxed{m \in \left\{-1, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 1\right\}}$$

2) On conserve la notation Δ_m précédente. La condition cherchée est cette fois :

$$m \notin \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \Delta_m > 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{m \in]-\infty, -1[\cup \left]-1, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right[\cup \left]\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1\right[\cup]1, +\infty[} \qquad (1)$$

3) La condition (1) est supposée remplie. On cherche à quelle condition m est compris (strictement) entre les racines α_m et β_m du trinôme f_m. On utilisera la méthode présentée plus haut (juste après l'énoncé de l'ex. n° 6).

La condition cherchée est donc $f_m(m)$ et $m^2 - 1$ soient de signes contraires, ou encore que $f_m(m)$ et $1 - m^2$ soient de même signe. On constate que :

$$f_m(m) = m^4 - 2m^2 - 2 = g\left(m^2\right)$$

où l'on a posé :

$$g(x) = x^2 - 2x - 2$$

Les racines de ce dernier trinôme sont :

$$x_1 = 1 - \sqrt{3} \qquad x_2 = 1 + \sqrt{3}$$

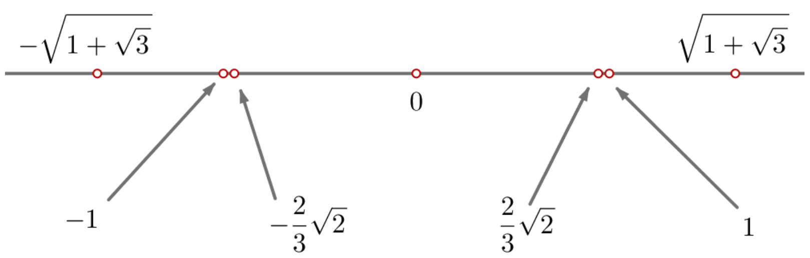
Ainsi :

$$f_m(m) < 0 \Leftrightarrow m^2 \in]x_1, x_2[$$

ou encore, vu que $x_1 < 0$:

$$f_m(m) < 0 \Leftrightarrow m^2 \in [0, x_2[\Leftrightarrow m \in \left]-\sqrt{1+\sqrt{3}}, \sqrt{1+\sqrt{3}}\right[$$

Avant d'aller plus loin, visualisons les positions relatives de tous ces nombres ($\pm\sqrt{x_2}$ et les extrémités des intervalles apparaissant dans la formule encadrée (1)) :



Donc :

3.a) Si $m \in \left]-1, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right[\cup \left]\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1\right[$, alors a fortiori $m \in \left]-\sqrt{1+\sqrt{3}}, \sqrt{1+\sqrt{3}}\right[$ et donc $f_m(m) < 0$, alors que $1 - m^2 > 0$. Ces valeurs de m ne conviennent pas.

3.b) Si $m \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $1 - m^2 < 0$, donc $f_m(m)$ du signe de $1 - m^2$ si, et seulement si :

$$m \in \left]-\sqrt{1+\sqrt{3}}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{1+\sqrt{3}}\right[$$