QUESTIONS BRÈVES - B : QUELQUES INDICATIONS

Mise en garde : pour les questionnaires du type « Vrai - Faux », les réponses attendues doivent être argumentées. Autrement dit, il n'est pas suffisant de répondre seulement « vrai » ou « faux » ! Il faut aussi expliquer pourquoi ... et c'est ainsi que vous devrez procéder lorsque de tels questionnaires vous seront proposés en devoir surveillé.
Ce document se borne à indiquer la réponse de façon binaire (« Vrai » ou « Faux »), en ajoutant parfois de courtes explications ... Vous ne devez donc pas le considérer comme un véritable « corrigé ».

B1) $\frac{\sqrt{3}}{7\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{35}$: **VRAI**

B2) $\frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$: **VRAI**

B3) $\sqrt{11} - \sqrt{6} = \sqrt{5}$: **FAUX**

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} & \sqrt{11} - \sqrt{6} = \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{11-6}{\sqrt{11}+\sqrt{6}} = \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{11}+\sqrt{6} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{5} = \sqrt{11}+\sqrt{6} \end{aligned}$$

ce qui est faux, car le membre de gauche de la dernière égalité est inférieur à 3, tandis que le membre de droite est supérieur à $\sqrt{11}$ donc à 3. □

La contradiction apparaît aussi si l'on confronte la première égalité à la dernière : il en résulte que $\sqrt{11} - \sqrt{6} = \sqrt{11} + \sqrt{6}$ et donc $\sqrt{6} = 0$, ce qui est un peu gênant.

Remarque.

a) Par commodité de rédaction , on utilise ici l'équivalence entre propositions, ce qui signifie que les deux propositions ont la même valeur de vérité : elles sont toutes les deux fausses ou bien toutes les deux vraies.
On peut éviter cet usage en manipulant les nombres autrement :

$$\sqrt{11} - \sqrt{6} = \frac{11-6}{\sqrt{11}+\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$$

Or $\sqrt{11} + \sqrt{6} > \sqrt{6} > \sqrt{5} > 0$, donc :

$$\sqrt{11} - \sqrt{6} < \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

b) En utilisant le fait que pour deux nombres réels positifs x et y on a : $x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2$ ($\star$) , il vient :

$$\begin{aligned} & \sqrt{11} - \sqrt{6} = \sqrt{5} \\ \Longleftrightarrow\ & \sqrt{11} = \sqrt{6} + \sqrt{5} \\ \Longleftrightarrow\ & 11 = \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2 \quad \text{en utilisant } \star \\ \Longleftrightarrow\ & 11 = 11 + 2\sqrt{30} \end{aligned}$$

ce qui est clairement faux.

c) Il ne fallait pas tomber dans le piège qui poussait à utiliser la formule **fausse** $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$.

B4) $\sqrt{5}-\sqrt{2}=\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$: **VRAI**

B5) $\sqrt{\frac{20}{63}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{7}}$: **VRAI**

B6) $\sqrt{43}-\sqrt{42}<\sqrt{116}-\sqrt{115}$: **FAUX**

B7) $\sqrt{10}+\sqrt{12}>2\sqrt{11}$: **FAUX**

B8) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$:**VRAI**

B9) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$:**FAUX**

B10) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$: **VRAI**

B11) $\forall x\in\mathbb{R},\ \sqrt{x^2}=x$: **FAUX**

Démonstration. Contre-exemple avec $x=-1$. Plus généralement, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2}=|x|$. □

Remarque. C'est d'ailleurs une erreur fréquemment commise. Donc, ATTENTION!!

B12) $\forall x\in\mathbb{R},\ \sqrt{x^4}=x^2$: **VRAI**

B13) $\forall x\in[0,+\infty[,\ \sqrt{x^3}=\left(\sqrt{x}\right)^3$: **VRAI**

B14) $\exists n\in\mathbb{N};\ \sqrt{n^2+6n+9}\notin\mathbb{N}$: **FAUX**

Démonstration. Pour tout entier naturel n on a $\sqrt{n^2+6n+9}=\sqrt{(n+3)^2}=n+3\in\mathbb{N}$, la dernière égalité étant justifiée par le fait que $n+3$ est positif. □

B15) $\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2,\ \sqrt{n+p}>\sqrt{n}+\sqrt{p}$: **FAUX**

Remarque. A-t-on « $\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2,\ \sqrt{n+p}\leqslant\sqrt{n}+\sqrt{p}$ » ?

B16) $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}$: **FAUX**

B17) $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \frac{n+1}{n\sqrt{n}}<\frac{\sqrt{n+1}}{n}$: **FAUX**

B18) $\forall n\in\mathbb{N},\ \left(\sqrt{2}\right)^{2n}=2^n$ et $\left(\sqrt{2}\right)^{2n+1}=2^n\sqrt{2}$: **VRAI**

B19) La suite $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ comporte 3 termes en progression arithmétique : **VRAI**

B20) $\exists n\in\mathbb{N},\ \left(\sqrt{2}\right)^n>1234,56$: **VRAI**

Remarque. Plus généralement :
- quel que soit $A\in\mathbb{R}$ il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\left(\sqrt{2}\right)^n>A$,
- pour tout $q\in\mathbb{R}$, $q>1$ on a : quel que soit $A\in\mathbb{R}$ il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $q^n>A$.

B21) $\exists n\in\mathbb{N},n\sqrt{2}\in\mathbb{N}$: **VRAI**

Remarque. Et « $\exists n\in\mathbb{N}^*,n\sqrt{2}\in\mathbb{N}$ » ?

B22) $\forall(n,p)\in(\mathbb{N}^\star)^2,\ \frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{p}}\leqslant\frac{2\max\{\sqrt{n},\sqrt{p}\}}{\sqrt{np}}$: **VRAI**

B23) $\forall(n,p)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{N},\ \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+p}}=\frac{p}{\sqrt{n(n+p)}\left(\sqrt{n+p}+\sqrt{n}\right)}$: **VRAI**

B24) $\forall(n,p)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{N}^\star,\ \frac{n+\sqrt{p}}{\sqrt{n+p}}<\sqrt{n}+\sqrt{\frac{p}{n}}$: **VRAI**

B25) $\forall n\in\mathbb{N}^\star,1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\sqrt{n}$: **VRAI**

B26) $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\leqslant n$: **VRAI**

Démonstration. On a d'abord pour tout entier $k\geqslant 1$: $0\leqslant\dfrac{k}{k+1}\leqslant 1$. On en déduit que $\sqrt{\dfrac{k}{k+1}}\leqslant 1$ puis la majoration :

$$\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{k+1}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}1=n$$

□

Remarque. Si $m \in \mathbb{R}$ minore tous les éléments d'une liste $(x_1, \dots, x_n)$ de réels et si $M \in \mathbb{R}$ les majore, alors en additionnant les inégalités $m \leqslant x_k \leqslant M$ valables pour tout entier k compris entre 1 et n, on obtient :

$$n.m \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant n.M$$

En particulier, $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}(x_1, \dots, x_n)$ et $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}(x_1, \dots, x_n)$ désignant respectivement le plus petit et le plus grand élément de la liste $(x_1, \dots, x_n)$:

$$n.\min_{1 \leqslant k \leqslant n}(x_1, \dots, x_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant n.\max_{1 \leqslant k \leqslant n}(x_1, \dots, x_n)$$

B27) $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt{k+1}} < \sum\limits_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$: **VRAI**

B28) $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{k+1}}$: **FAUX**

Remarque. A-t-on « $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{k+1}}$ » ?

B29) $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \geqslant \frac{n}{2}$: **VRAI**

B30) $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}$: **VRAI**

B31) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$: **VRAI**

B32) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^2+n+2}}{2n+1} = 1$: **FAUX**

B33) $\lim\limits_{n \to -\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n+4} = 1$: **FAUX**

Pour tout entier $n < 0$: $\sqrt{n^2+n+1} = \sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = -n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$. Ceci permet de voir que la limite proposée est égale à -1.

B34) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{2} - 1\right)^n = 0$: **VRAI**

B35) $\forall x \in [-1, +\infty[,\ \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$: **VRAI**

Remarque. Un dessin pour illustrer la situation ?

B36) $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+x+1} \geqslant 1$: **FAUX**

B37) $\forall x \in]-1, 1[,\ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \geqslant 1 + x$: **VRAI**

B38) $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2,\ \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$: **VRAI**

B39) $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2,\ \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 \geqslant 2(x+y)$: **FAUX**

Remarque. A-t-on « $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2,\ \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 \leqslant 2(x+y)$ » ?

B40) $\forall (x, h) \in [0, +\infty[^2,\ \sqrt{x+h} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{h}$: **VRAI**

B41) $\lim\limits_{n \to \infty} \sin\left(\pi\left(\sqrt{2}+1\right)^n\right) = 0$: **VRAI**

Indication : Montrer, en utilisant la formule du binôme, que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n \in \mathbb{Z}$. Et montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \sqrt{2}\right)^n = 0$