CORRECTION DU PROBLÈME 05

1°) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^{2/n}} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^n(x)}{x^2} = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0}$

2°) f_n est dérivable d'après les théorèmes généraux et, pour tout $x \in I$: :

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!}\,\frac{n\dfrac{\ln^{n-1}(x)}{x}x^2 - 2x\ln^n(x)}{x^4} = \frac{\ln^{n-1}(x)\,(n-2\ln(x))}{n!\,x^3}$$

Soit $x > 1$. Il est bien clair que $ln(x) > 0$, que $n - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^{\frac{n}{2}}$ et $n - 2\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{n}{2}}$. On en déduit les variations de f_n :

Pour $n > 1$:

x	1		$e^{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n\left(e^{n/2}\right)$	$\searrow$	0

Pour $n = 1$:

x	1		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_1'(x)$	1	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$f_1\left(\sqrt{e}\right)$	$\searrow$	0

Le maximum de f_n est donc :

$$\boxed{y_n = f_n\left(e^{n/2}\right) = \frac{\left(\frac{n}{2e}\right)^n}{n!}}$$

3°) Etude de la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$:

a) Pour tout $n \geqslant 1$:

$$f_n\left(e^{(n+1)/2}\right) = \frac{1}{n!}\,\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{e^{n+1}} = 2\,\frac{\left(\frac{n+1}{2e}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = 2\,y_{n+1}$$

Comme $e^{(n+1)/2} > e^{n/2}$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle) et vue la décroissance de f_n sur $\left[e^{n/2}, +\infty\right[$:

$$f_n\left(e^{(n+1)/2}\right) \leqslant f_n\left(e^{n/2}\right)$$

Autrement dit :

$$\boxed{y_{n+1} \leqslant \frac{y_n}{2}}$$

b) D'après le point précédent, une récurrence simple laissée au lecteur montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 0 < y_n \leqslant \frac{y_1}{2^{n-1}}$$

Il s'ensuit, puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{y_1}{2^{n-1}} = 0$ et en conséquence du théorème des gendarmes, que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = 0}$$