Lycée Thiers

Mini-PB
MPSI-MPII

PROBLÈME 02

On rappelle les formules d'addition pour les fonctions cosinus et sinus, valables pour tout couple (a, b) de nombres réels :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

On pose :

$$p = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$$

1°) Rappeler le sens de variation et le signe des fonctions cos et sin sur $[0, 2\pi]$.

2°) Préciser le signe de p, en justifiant la réponse.

3°) Exprimer, pour tout réel a, $\sin(2a)$ à l'aide de $\sin(a)$ et $\cos(a)$. En utilisant la relation obtenue, transformer l'expression $p\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$, puis calculer p.

4°) Démontrer, pour tout couple (a, b) de réels, la formule :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

Montrer alors que :

$$4p = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 1$$

5°) Déduire de 3°) et 4°) que $\alpha = 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ est une solution de l'équation $(E) : x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

6°) Etudier les variations de la fonction polynôme :

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - x^2 - 2x + 1$$

En déduire le nombre de solutions réelles de l'équation (E).